



FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA ATÓMICA, MOLECULAR Y NUCLEAR

Trabajo Fin de Grado:
Dinámica del sólido rígido

Autor:
Antonio Calzadilla Navas

Dirigido por:
María Isabel García de Soria Lucena

2017 - 2018

Índice general

English Abstract	1
1. Introducción	3
2. Dinámica de un sistema de partículas	5
2.1. Introducción	5
2.2. Observaciones previas	6
2.3. Movimiento del centro de masa	7
2.4. Momento angular	10
2.5. Energía cinética de un sistemas de partículas	14
2.6. Conservación de la energía	17
3. Dinámica del sólido rígido	21
3.1. Introducción	21
3.2. Momento angular de un cuerpo rígido	22
3.2.1. Ejes principales de inercia	24
3.3. Cálculo del momento de inercia	25
3.4. Ecuación del movimiento de la rotación de un sólido rígido	28

3.5. Energía cinética de rotación	29
4. Aplicaciones	31
4.1. Introducción	31
4.2. Polea con dos pesos	31
4.3. Péndulo físico	34
4.4. Péndulo de torsión	35
4.5. Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos	36
4.6. Movimiento giroscópico	40
4.6.1. Precesión	41
5. Conclusiones	45
 Anexos	
 A. Momento de inercia de cuerpos más frecuentes	47

English Abstract

Throughout this work we are going to develop the study of rigid body dynamics. We will start with the study of a system of particles. Later we will focus on rigid body dynamics. We will define important concepts such as the moment of inertia, which will have a fundamental role in order to obtain the equation of rotation of a rigid body. Afterwards, we are going to apply this theoretical knowledge to various situations. Finally, we are going to study gyroscopic motion. At the end, we will present the conclusions we have obtained along these pages.

1 | Introducción

En este trabajo vamos a realizar el estudio de la dinámica del sólido rígido. Estos cuerpos pueden considerarse como un caso especial de sistemas de partículas en los cuales las distancias entre sus componentes se mantienen constantes. Por este motivo empezaremos analizando la dinámica de un sistema de partículas. Veremos como el centro de masa cumple un papel fundamental a la hora de estudiar la dinámica de un sistema de partículas. Posteriormente, definiremos el momento angular y el torque y estudiaremos la relación que guardan estas magnitudes. Para finalizar el estudio de un sistema de partículas nos centraremos en la energía del sistema. Definiremos la energía cinética y el trabajo hecho por las distintas fuerzas, tanto internas como externas y veremos como la energía se total del sistema se conserva cuando las fuerzas que actúan sobre él son conservativas.

En el capítulo 3 nos centraremos en la dinámica del sólido rígido. El movimiento de un sólido rígido puede descomponerse en movimiento de traslación y movimiento de rotación. Aplicaremos los resultados obtenidos con anterioridad para sistemas de partículas para describir el movimiento de traslación, centrándonos en este capítulo en el movimiento de rotación. Introduciremos una nueva magnitud, el momento de inercia, que tiene un papel fundamental a la hora de obtener dichas ecuaciones.

En el capítulo 4 aplicaremos los resultados obtenidos en el capítulo anterior de problemas concretos. Por un lado, consideraremos situaciones en las que el eje de rotación permanezca fijo. Estudiaremos la condición de rodadura y la usaremos en el caso en el que un cuerpo rueda sobre un plano inclinado. También estudiaremos el movimiento giroscópico. En este caso el eje de rotación cambia de dirección. Veremos que el eje de giro del sólido rígido, mientras está rotando describe una trayectoria circular, que definiremos como movimiento de precesión.

Finalmente, en el capítulo 5 presentaremos las conclusiones que hemos obtenido a lo largo de todo el trabajo.

2 | Dinámica de un sistema de partículas

2.1 Introducción

En este capítulo discutiremos la dinámica de un sistema de partículas, ya que será clave a la hora de analizar el movimiento del sólido rígido. Nos centraremos en el estudio de la traslación del centro de masa, la conservación del momento angular y la conservación de la energía dependiendo del tipo de fuerzas que actúen.

Al generalizar a un sistema de muchas partículas las ideas que tenemos sobre la dinámica de una sola partícula, deberemos distinguir entre fuerzas externas, que se ejercen sobre las partículas debido a la interacción del sistema con el exterior y fuerzas internas, causadas por la interacción entre las partículas que componen el sistema. Además debemos precisar si estas fuerzas son o no conservativas. En el caso de que actúen fuerzas conservativas veremos que la energía del sistema se conserva.

Finalmente, cabe mencionar que a lo largo de este capítulo supondremos que las masas de las partículas son constantes. Aunque alguno de los desarrollos que presentamos en el capítulo se refieren a sistemas de dos partículas, la generalización a un sistema de N partículas es inmediata.

2.2 Observaciones previas

Puede parecer que el estudio de la dinámica de un sistema de partículas se puede realizar con facilidad. Sin embargo, si tenemos un sistema con un gran número de partículas, estos cálculos se complican. Si suponemos un sistema de N partículas, las ecuaciones que definen el movimiento serían:

$$\begin{cases} \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \dots = m_1 \vec{a}_1 = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2}, \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \dots = m_2 \vec{a}_2 = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}, \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \vec{F}_N + \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \vec{F}_{N3} + \dots = m_N \vec{a}_N = m_N \frac{d^2 \vec{r}_N}{dt^2}, \end{cases} \quad (2.1)$$

siendo \vec{F}_i la fuerza externa sobre la partícula i y \vec{F}_{ij} la fuerza interna sobre la partícula i debido a su interacción con la partícula j . Obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, complejo de resolver aún sin contar con un número demasiado elevado de partículas.

Veremos a lo largo del capítulo cómo podemos definir un punto especial en el sistema que nos permite estudiar de forma más sencilla el movimiento de un sistema de partículas. Este punto es el llamado centro de masa, cuyo vector de posición viene dado por

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (2.2)$$

donde $M = \sum_{i=1}^N m_i$, es la masa total del sistema de N partículas.

Conforme nos adentremos en este capítulo, veremos que el centro de masa se mueve como si fuera una partícula de masa M , sobre la que actúa la suma de las fuerzas externas que afectan al sistema.

En ocasiones, para facilitar el estudio, será común elegir el centro de masa como origen de nuestro sistema inercial de referencia. Este es el llamado *sistema de referencia del centro de masa* o *sistema-C de referencia*. Otro sistema de referencia que usaremos a lo largo del trabajo será el *sistema laboratorio* o *sistema-L*, desde el punto de vista de un observador externo. En algunas ocasiones será necesaria la relación entre las magnitudes medidas en uno u otro sistema de referencia.

2.3 Movimiento del centro de masa

[Definición 2.3.1. Sea un sistema compuesto de N partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_N , y velocidades $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N$, relativas a un sistema inercial de referencia, definiremos la velocidad del centro de masa como

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_N \vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M}. \quad (2.3)$$

Si las masas de las partículas son independientes de las velocidades, \vec{v}_{CM} corresponde a la velocidad del punto denominado centro de masa. Esto puede comprobarse tomando la derivada temporal de la ecuación (2.2)

$$\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i}{M} = \vec{v}_{CM}. \quad (2.4)$$

Teniendo en cuenta que la cantidad de movimiento de la partícula i viene dada por $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, podemos reescribir (2.3) como

$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \frac{\vec{P}}{M}, \quad (2.5)$$

donde $\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ es la cantidad de movimiento total del sistema. De esta forma $\vec{P} = M \vec{v}_{CM}$, esto es, la cantidad de movimiento del sistema, es la misma que correspondería al caso en el que toda la masa del sistema estuviese concentrada en el centro de masa, moviéndose con velocidad \vec{v}_{CM} . Por este motivo, \vec{v}_{CM} se denomina algunas ocasiones velocidad del sistema.

Si el sistema está aislado, sabemos por el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* que \vec{P} es constante. Por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.3.1. El centro de masa de un sistema aislado se mueve con velocidad constante con relación a un sistema inercial (suponiendo que las masas de las partículas son independientes a su velocidad).

Si tomamos como sistema inercial de referencia el sistema-C, el centro de masa estará en reposo ($\vec{v}_{CM} = 0$). La cantidad de movimiento de un sistema de partículas referido al sistema-C de referencia siempre es cero:

$$\vec{P}_{CM} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = 0. \quad (2.6)$$

Por esta razón, el sistema-C es llamado en ocasiones *sistema de cantidad de movimiento cero*.

Supongamos ahora que el sistema S no está aislado. En este caso, las partículas de S interactúan con otras partículas pertenecientes a otro sistema diferente S' . Consideraremos en este caso al conjunto $S + S'$ como un sistema aislado.

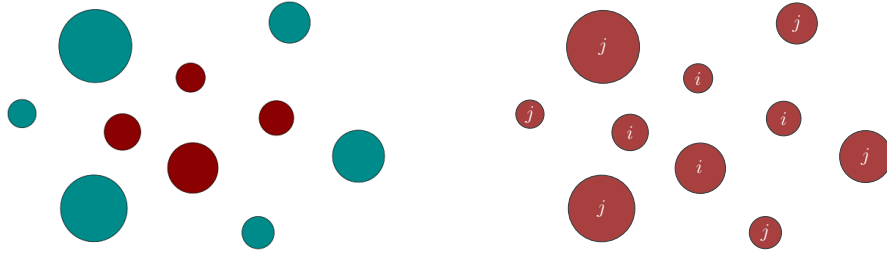


Figura 2.1: Sistema S y S' visto como un sistema aislado.

Denotamos a las partículas que pertenecen a S con el subíndice i , y aquellas que pertenecen a S' con el subíndice j , como podemos ver en la Figura 2.1. Aplicando el *principio de conservación de la cantidad de movimiento* para el sistema aislado $S + S'$ obtenemos

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i + \sum_j \vec{p}_j = \vec{P}_S + \vec{P}_{S'} = \text{constante}. \quad (2.7)$$

Como consecuencia, cualquier cambio en la cantidad de movimiento de S debe estar acompañado por un cambio igual y opuesto en la cantidad de movimiento de S'

$$\Delta \vec{P}_S = -\Delta \vec{P}_{S'}. \quad (2.8)$$

Por este motivo, la interacción entre los sistemas S y S' puede ser descrita como un intercambio de cantidad de movimiento.

| Definición 2.3.2. Llamamos fuerza externa ejercida sobre S a la derivada temporal de la cantidad de movimiento del sistema S

$$\frac{d\vec{P}_S}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = \vec{F}_{ext}. \quad (2.9)$$

La denotamos fuerza externa porque el cambio de la cantidad de movimiento de S es debido a su interacción con un sistema externo, S' . Como veremos más adelante, las fuerzas internas que existen en S debidas a las interacciones entre sus partículas no producen ningún cambio en la cantidad de movimiento total.

Derivando respecto al tiempo la expresión (2.7) y aplicando la definición 2.3.2, entonces $\vec{F}_{ext} = -\vec{F}'_{ext}$, donde \vec{F}_{ext} es la fuerza externa sobre el sistema S y \vec{F}'_{ext} es la fuerza externa que actúa sobre S' . Esta expresión constituye la ley de acción reacción para las interacciones entre los sistemas S y S' .

Derivando temporalmente la ecuación (2.5) y gracias a (2.9) obtenemos

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}. \quad (2.10)$$

Podemos ver que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema sujeta a la fuerza externa aplicada al sistema.

Observación 2.3.1. Como hemos mencionado anteriormente, las fuerzas internas no intervienen a la hora de la variación de la cantidad de movimiento.

Suponemos un sistema S compuesto por dos partículas. Designamos con \vec{F}_{12} la fuerza interna sobre la partícula m_1 debida a su interacción con m_2 . Del mismo modo, \vec{F}_{21} es la fuerza interna sobre m_2 debida a su interacción con m_1 . Por la ley de acción y reacción

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.11)$$

Sea \vec{F}_1 la fuerza externa resultante sobre m_1 y \vec{F}_2 la fuerza externa sobre m_2 , tenemos

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}. \quad (2.12)$$

Sumando ambas ecuaciones y usando la ecuación (2.11), de tal forma que $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$, encontramos que

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (2.13)$$

Por lo tanto, el cambio total por unidad de tiempo de la cantidad de movimiento del sistema es igual a la suma de las fuerzas externas aplicadas a las dos partículas. Si generalizamos este resultado a sistemas con N partículas

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i \right) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_{ext}, \quad (2.14)$$

donde \vec{F}_i es la fuerza externa sobre la partícula m_i . Gracias a este resultado, vemos que la fuerza externa sobre un sistema de partículas es la suma de las fuerzas externas sobre cada una de las partículas del sistema.

2.4 Momento angular

Definición 2.4.1. Definimos el momento angular de una partícula respecto a un punto dado como la cantidad vectorial

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}). \quad (2.15)$$

Definición 2.4.2. Definimos el torque de una fuerza como

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.16)$$

Proposición 2.4.1 (Relación entre el momento angular y el torque de la fuerza aplicada). Podemos definir el torque como la derivada temporal del momento angular, es decir,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}. \quad (2.17)$$

Demostración. Si tomamos la derivada con respecto al tiempo del momento angular, obtenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.18)$$

Observamos que $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, y $\vec{p} = m\vec{v}$ es siempre paralelo a \vec{v} , de modo que

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times \vec{p} = m\vec{v} \times \vec{v} = 0. \quad (2.19)$$

Por otro lado, $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ de acuerdo con la expresión (2.9). Entonces podemos reescribir la ecuación (2.18), usando (2.16) como

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}. \quad (2.20)$$

|

| Teorema 2.4.1 (Ley fundamental de la dinámica de rotación). *La variación del momento angular total de un sistema de partículas, relativo a un punto arbitrario, es igual al torque total, relativo al mismo punto, de las fuerzas externas actuantes sobre el sistema.*

Demostración. Consideramos el caso de dos partículas. Este resultado se extenderá de forma inmediata al caso de N partículas. Aplicando (2.16) a la partícula i , $i = 1, 2$

$$\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{\tau}_i. \quad (2.21)$$

Sumando esta ecuación para ambos valores,

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2. \quad (2.22)$$

Si suponemos que cada partícula, además de a su interacción con la otra partícula está sometida a una fuerza externa, la fuerza sobre la partícula 1 será $\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$ y sobre la partícula 2 será $\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$, y

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12}, \quad (2.23)$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}. \quad (2.24)$$

Teniendo en cuenta que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, el torque total sobre las partículas es

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21}. \quad (2.25)$$

El vector $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12}$ tiene la dirección de la línea que une las dos partículas. Si suponemos que las fuerzas internas \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} actúan a lo largo de la línea \vec{r}_{12} que une las dos partículas, los vectores \vec{r}_{21} y \vec{F}_{12} son paralelos, y por tanto $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F}_{21} = 0$. El último término de la ecuación es nulo, dejando solamente los torques debidos a las fuerzas externas

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{\tau}_{1,ext} + \vec{\tau}_{2,ext}. \quad (2.26)$$

Podemos generalizar este resultado a N partículas, obteniendo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}. \quad (2.27)$$

| Corolario 2.4.1 (Ley de conservación del momento angular). El momento angular total de un sistema aislado, o un sistema sobre el que actúa un torque externo total nulo, es constante en magnitud y dirección.

Demostración. Si no hay fuerzas externas, o si la suma de sus torques es cero, $\vec{\tau}_{ext} = 0$; por la proposición anterior

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \right) = 0. \quad (2.28)$$

Integrando, obtenemos

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \text{constante}. \quad (2.29)$$

Proposición 2.4.2 (Relación entre el momento angular de un sistema de partículas relativo al sistema-L y el momento angular relativo al sistema-C). Se denomina momento angular interno del sistema al momento angular del sistema relativo al sistema-C. Es una propiedad del sistema y es independiente del observador. La relación entre el momento angular en el sistema-C y en el sistema-L es

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}. \quad (2.30)$$

Demostración. Consideramos un sistema compuesto de dos partículas. El momento angular relativo al laboratorio o sistema-L es

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2. \quad (2.31)$$

Si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son las velocidades relativas al sistema-L y \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 las velocidades relativas al sistema-C, tenemos que $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$ para $i = 1, 2$. Entonces

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i (\vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}) = \vec{p}'_i + m_i \vec{v}_{CM}. \quad (2.32)$$

Por tanto, recordando que $\vec{r}_i = \vec{r}'_i + \vec{r}_{CM}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{L} &= (\vec{r}'_1 + \vec{v}_{CM}) \times (\vec{p}'_1 + m_1 \vec{v}_{CM}) + (\vec{r}'_2 + \vec{v}_{CM}) \times (\vec{p}'_2 + m_2 \vec{v}_{CM}) \\ &= \vec{r}'_1 \times \vec{p}'_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{p}'_2 + \vec{r}_{CM} \times (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2) + (m_1 \vec{r}'_1 + m_2 \vec{r}'_2) \times \vec{v}_{CM}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

La suma de los dos primeros sumandos por definición es \vec{L}_{CM} , el tercer sumando es cero, debido a que $\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = 0$ por la ecuación (2.6) y el último sumando se puede expresar debido a la ecuación (2.2) como $(m_1 + m_2)\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}$. Por tanto

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + (m_1 + m_2)\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM} = \vec{L}_{CM} + M\vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}. \quad (2.34)$$

Proposición 2.4.3 (Relación entre el torque externo alrededor del centro de masa y el momento angular interno de un sistema de partículas).

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM} \quad (2.35)$$

Demostración. Considerando de nuevo un sistema de dos partículas de masas m_1 y m_2 sujetas a fuerzas externas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 , tenemos que el torque total externo relativo al origen de coordenadas en el sistema-L es

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_{ext} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= (\vec{r}'_1 + \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}'_2 + \vec{r}_{CM}) \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}'_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}'_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{CM} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Los dos primeros términos dan el torque externo relativo al centro de masa, que designaremos como $\vec{\tau}_{CM}$, mientras que el último término da el torque de la fuerza externa resultante $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ como si estuviese aplicado en el centro de masa. Por tanto,

$$\vec{\tau}_{ext} = \vec{\tau}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext}. \quad (2.37)$$

Por otro lado, tomando la derivada temporal ecuación (2.30), tenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + M\vec{r}_{CM} \times \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} + M\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} \times \vec{v}_{CM}. \quad (2.38)$$

Recordamos que $\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{v}_{CM}$, de manera que el último término es cero, y usando la ecuación (2.9), obtenemos

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} + \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_{ext}. \quad (2.39)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.27) las expresiones que acabamos de obtener ((2.37) y (2.39)), obtenemos que

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}. \quad (2.40)$$

■

Esta relación es formalmente idéntica a la ecuación (2.27), pero existen algunas diferencias básicas. La ecuación (2.27) es válida solamente cuando el momento angular y el torque se evalúan con relación a un punto fijo en un sistema de referencia inercial, usualmente el origen de coordenadas. Por otra parte, la ecuación (2.35) es válida para el cálculo con respecto al centro de masa, aún si este no está en reposo con relación a un sistema de referencia inercial. Aunque esta ecuación ha sido probada para dos partículas, es también válida para un sistema compuesto por N partículas. Veremos que esta expresión es especialmente útil para discutir el movimiento de un sólido rígido.

2.5 Energía cinética de un sistemas de partículas

Consideremos un sistema compuesto por dos partículas de masa m_1 y m_2 . Sobre estos cuerpos actúan, respectivamente, las fuerzas externas \vec{F}_1 y \vec{F}_2 y las fuerzas interna \vec{F}_{12} y \vec{F}_{21} . En un cierto instante t_0 dichas partículas ocupan una configuración A , moviéndose con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 a lo largo de las trayectorias C_1 y C_2 .

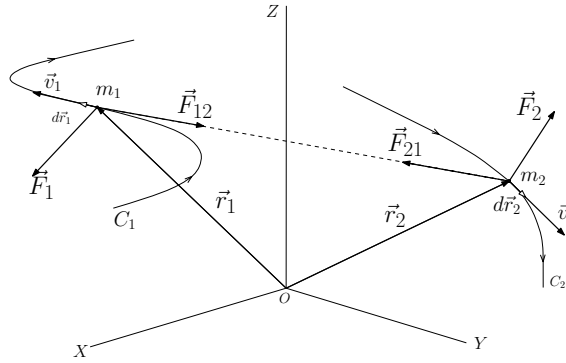


Figura 2.2: Sistema de dos partículas.

La ecuación del movimiento de cada partícula es

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad (2.41)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}. \quad (2.42)$$

En un intervalo de tiempo dt , las partículas experimentan un desplazamiento $d\vec{r}_i$ tangentes a sus trayectorias. Si multiplicamos escalarmente la ecuación (2.41) por $d\vec{r}_1$ y la segunda ecuación (2.42) con $d\vec{r}_2$, y las sumamos teniendo en cuenta de que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, obtenemos

$$m_1 \vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 + m_2 \vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2). \quad (2.43)$$

Dado que $d\vec{r}_1/dt = \vec{v}_1$ y $\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1 = v_1 dv_1$, obtenemos que

$$\vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 = (d\vec{v}_1/dt) \cdot d\vec{r}_1 = d\vec{v}_1 \cdot (d\vec{r}_1/dt) = v_1 dv_1. \quad (2.44)$$

Análogamente, $\vec{a}_2 \cdot d\vec{r}_2 = v_2 dv_2$. También debemos tener en cuenta que $d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2 = d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = d\vec{r}_{12}$.

De esta forma, la ecuación (2.43) se transforma en

$$m_1 v_1 dv_1 + m_2 v_2 dv_2 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}. \quad (2.45)$$

Integrando a partir de un tiempo inicial t_0 hasta un tiempo arbitrario t , obtenemos

$$m_1 \int_{v_{10}}^{v_1} v_1 dv_1 + m_2 \int_{v_{20}}^{v_2} v_2 dv_2 = \int_A^B (\vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2) + \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12}, \quad (2.46)$$

donde A y B son usados para designar las configuraciones de las partículas, v_{i0} y v_i son las velocidades, ambos respectivamente en el tiempo t_0 y t . Integrando el primer miembro de la ecuación y definiendo posteriormente los demás términos podemos simplificar la ecuación anterior (2.46).

Puesto que $\int_{v_0}^v v dv = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$, el primer miembro de la ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1,0}^2 \right) + \left(\frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{2,0}^2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 \right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_{1,0}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2,0}^2 \right) \\ &= E_c - E_{c,0}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Definimos E_c como la energía cinética del sistema.

| Definición 2.5.1. La energía cinética total de un sistema de N partículas en el instante t , E_c , respecto al sistema de referencia- L viene dada por

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (2.48)$$

Proposición 2.5.1 (Relación entre la energía cinética de un sistema de partículas relativa al sistema-L y la energía cinética interna relativa al sistema-C).

$$E_c = E_{c,CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (2.49)$$

Demostración. Consideramos por simplicidad dos partículas de masas m_1 y m_2 con velocidades \vec{v}_1 y \vec{v}_2 en el sistema-L, y velocidades \vec{v}'_1 y \vec{v}'_2 en el sistema-C. Las dos velocidades están relacionadas por $\vec{v}_i = \vec{v}'_i + \vec{v}_{CM}$, donde \vec{v}_{CM} es la velocidad del centro de masa relativa al sistema-L.

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}'_1 + \vec{v}_{CM})^2 + \frac{1}{2} m_2 (\vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM})^2. \quad (2.50)$$

Podemos reescribir este enunciado como

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + (m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2) \cdot \vec{v}_{CM}. \quad (2.51)$$

La cantidad $m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$ es la cantidad de movimiento total del sistema referido al centro de masa, y por la ecuación (2.6), debe ser cero. La energía cinética interna referida al sistema-C la componen los dos primeros sumandos. Por lo tanto,

$$E_c = E_{c,CM} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 = E_{c,CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2. \quad (2.52)$$

|

Definición 2.5.2. Sea un sistema de N partículas. Definimos el trabajo total realizado por las fuerzas externas durante el intervalo de tiempo de t_0 a t como

$$W_{ext} = \int_A^B \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i, \quad (2.53)$$

donde A y B determinan la posición inicial y final de las partículas.

Definición 2.5.3. Sea un sistema de N partículas. Definimos el trabajo realizado por las fuerzas internas, que denotamos por W_{int} , entre el tiempo t_0 y t a

$$W_{int} = \int_A^B \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij}, \quad (2.54)$$

donde A es la posición inicial y B la final.

Gracias a los anteriores resultados y definiciones podemos reescribir la ecuación (2.46) como

$$E_c - E_{c,0} = W_{ext} + W_{int}. \quad (2.55)$$

Proposición 2.5.2. Del análisis de la ecuación anterior podemos ver que el cambio de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas e internas.

2.6 Conservación de la energía

Como hemos visto anteriormente, la variación de energía cinética de un sistema de partículas es igual al trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Podemos particularizar dicho resultado para un sistema en el que las fuerzas que actúan son conservativas, es decir, cuando el trabajo que realizan sobre un cuerpo solo depende del punto inicial y final y no del recorrido que realiza. Las fuerzas conservativas verifican que $\vec{F} = -\nabla E_p$, siendo E_p una cierta energía potencial.

Supongamos que las fuerzas internas son conservativas. En este caso, existe una función $E_{p,12}$ dependiente de las coordenadas de las dos partículas tal que

$$W_{int} = \int_A^B \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_{12} = E_{p,12,0} - E_{p,12}. \quad (2.56)$$

| Definición 2.6.1. Llamaremos $E_{p,12}$ a la energía potencial interna del sistema. Si las fuerzas internas actúan a lo largo de la línea \vec{r}_{12} que unen las dos partículas, entonces la energía potencial interna depende solamente de la distancia r_{12} .

En este caso la energía potencial interna es independiente del sistema de referencia ya que contiene sólo la distancia entre las dos partículas.

Sustituyendo la ecuación (2.56) en la ecuación (2.55) obtenemos

$$E_c - E_{c,0} = W_{ext} + E_{p,12,0} - E_{p,12}, \quad (2.57)$$

es decir,

$$(E_c + E_{p,12}) - (E_c + E_{p,12})_0 = W_{ext}. \quad (2.58)$$

| Definición 2.6.2. Definimos la energía propia del sistema, U , como la suma de la energía potencial interna y la energía cinética respecto a un observador inercial.

Para un sistema con dos partículas

$$U = E_c + E_{p,12} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + E_{p,12}. \quad (2.59)$$

Podemos extender el resultado a un sistema con N partículas

$$U = E_c + E_{p,int} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N E_{p,ij}. \quad (2.60)$$

Sustituyendo la definición de la energía propia en la ecuación (2.58) obtenemos un resultado importante.

Proposición 2.6.1 (Ley de conservación de la energía). El cambio de la energía propia de un sistema de partículas es igual al trabajo efectuado sobre el sistema por las fuerzas externas.

$$U - U_0 = W_{ext}. \quad (2.61)$$

Corolario 2.6.1. Si consideramos un sistema aislado ($W_{ext} = 0$). Entonces $U - U_0 = 0$, es decir, $U = U_0$. En consecuencia la energía propia de un sistema aislado permanece constante. Esto quiere decir que si la energía cinética de un sistema aislado aumenta, su energía potencial interna debe disminuir en la misma cantidad, de forma que su suma permanezca constante.

Puede suceder también que las fuerzas externas que actúan sobre un sistema sean también conservativas, de modo que

$$W_{ext} = E_{p,ext,0} - E_{p,ext}. \quad (2.62)$$

La ecuación (2.61) se transformaría en

$$U - U_0 = E_{p,ext,0} - E_{p,ext}, \quad (2.63)$$

es decir,

$$U + E_{p,ext} = U_0 + E_{p,ext,0}. \quad (2.64)$$

| Definición 2.6.3. *Llamamos energía total del sistema, E , a la suma de la energía propia del sistema y a la energía potencial asociada con las fuerzas externas del sistema. Este valor permanece constante durante el movimiento bajo las condiciones que estamos suponiendo, es decir, bajo fuerzas conservativas internas y externas.*

$$E = U + E_{p,ext} = E_c + E_{p,int} + E_{p,ext}. \quad (2.65)$$

Observación 2.6.1. La energía potencial depende únicamente de la distancia entre dos partículas por lo que tiene el mismo valor independientemente del sistema de referencia elegido. Sin embargo, como la energía cinética depende de la velocidad, el valor de esta depende del sistema de referencia utilizado.

3 | Dinámica del sólido rígido

3.1 Introducción

Hemos estudiado la dinámica de un sistema de partículas porque un sólido rígido es un caso específico de un sistema compuesto por una gran cantidad de partículas. Un sólido rígido tiene la característica de que la distancia entre sus componentes no varía, independientemente de que se aplique una fuerza o momento. Por lo tanto, este tipo de cuerpo conserva su forma durante el movimiento.

Cuando estudiamos un sólido rígido podemos distinguir dos tipos de movimiento. En primer lugar, el movimiento de traslación, en el que cambia la posición del cuerpo. Por otro lado, existe el movimiento de rotación alrededor de un eje. En este movimiento las partículas describen trayectorias circulares alrededor de una línea denominada eje de rotación. Este eje puede estar fijo o puede cambiar su dirección relativa con respecto al cuerpo durante su movimiento.

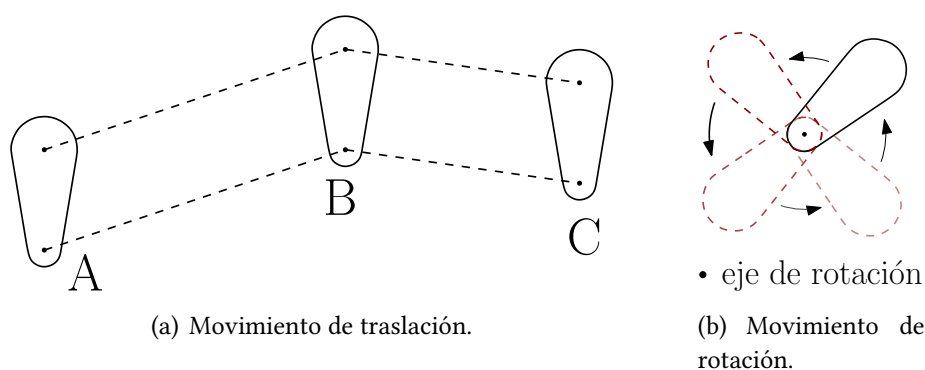


Figura 3.1: Tipos de movimiento.

De forma general, el movimiento de un sólido rígido puede considerarse como una combinación de una rotación y una traslación. Esto significa que siempre es posible encontrar un sistema de referencia en traslación pero no rotante en el cual el movimiento del cuerpo parezca solamente de rotación. Podemos ver que es posible esta descomposición del movimiento en la Figura 3.2.

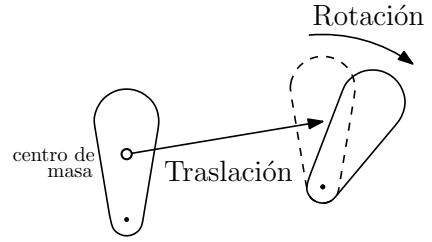


Figura 3.2: Descomposición.

Como vimos en el capítulo anterior en la ecuación (2.10), el movimiento del centro de masa es igual al movimiento de una partícula cuya masa es igual a la masa del cuerpo y sobre la cual actúa una fuerza igual a la suma de todas las fuerzas externas aplicadas al cuerpo. Este resultado es el que se emplea para estudiar el movimiento de traslación del sólido rígido.

En este capítulo estudiaremos el movimiento de rotación de un sólido rígido alrededor de un eje que pasa, bien a través de un punto fijo en un sistema inercial, o bien a través del centro de masa del cuerpo.

3.2 Momento angular de un cuerpo rígido

Consideremos el caso general de un sólido rígido en rotación. La posición de cada partícula i vendrá dada en coordenadas cartesianas por el vector de posición $\vec{r}_i = x_i \vec{u}_x + y_i \vec{u}_y + z_i \vec{u}_z$. Consideramos el sólido rígido girando con una velocidad angular $\vec{\omega}$ dada por $\vec{\omega} = \omega_x \vec{u}_x + \omega_y \vec{u}_y + \omega_z \vec{u}_z$.

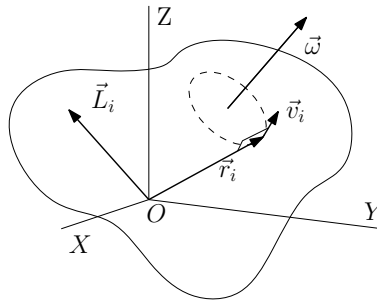


Figura 3.3: Sólido rígido en rotación.

Podemos calcular la velocidad lineal de cada partícula, \vec{v}_i , usando que $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. Posteriormente, calculamos el momento angular como $\vec{L}_i = m\vec{r}_i \times \vec{v}_i$. De este modo obtenemos que el momento angular para la partícula i puede expresarse matricialmente como

$$\vec{L}_i = \begin{pmatrix} L_{ix} \\ L_{iy} \\ L_{iz} \end{pmatrix} = m_i \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Por lo tanto, si consideramos un sistema de N partículas, el momento angular total será la suma de los momentos angulares de cada partícula, es decir,

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^N m_i(x_i^2 + z_i^2) & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i \\ -\sum_{i=1}^N m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^N m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^N m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}}_{\text{tensor de inercia}} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

A esta matriz la denominamos el tensor de inercia. Es una medida de la resistencia del sistema a cambiar su velocidad angular. Depende no sólo de la masa, sino también de cómo está distribuida alrededor del eje de giro. Viene dado por una matriz simétrica, lo que indica que es diagonalizable. Obtendremos una matriz diagonal en el caso en que su eje de rotación sea un eje principal, que definiremos posteriormente.

Si escogemos los ejes de coordenadas de forma que el eje de rotación del cuerpo coincida con el eje Z , la velocidad angular viene dada por $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$. Realizando los mismos cálculos, obtenemos el momento angular de la partícula i , que podemos escribir como

$$\vec{L}_i = m_i[-x_i z_i \vec{u}_x - y_i z_i \vec{u}_y + (x_i^2 + y_i^2) \vec{u}_z] \omega. \quad (3.3)$$

Nos centramos en el valor de la componente L_{iz} , ya que va a ser esta componente la que nos interesa para observar la variación de la velocidad angular.

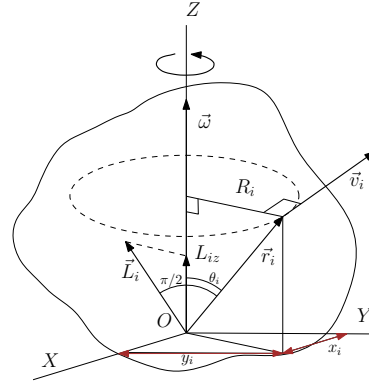


Figura 3.4: Eje Z como eje de giro.

Esto es debido a que hemos colocado el eje de rotación, y por tanto $\vec{\omega}$, en el eje Z .

$$L_{iz} = m_i(x_i^2 + y_i^2)\omega. \quad (3.4)$$

Debido a la disposición de los ejes podemos ver, con la ayuda de la Figura 3.4, que $x_i^2 + y_i^2 = R_i^2$, donde R_i es la distancia de la partícula i al eje Z .

La componente del momento angular total del cuerpo de N partículas en rotación a lo largo del eje de rotación Z es

$$\begin{aligned} L_z &= L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \cdots + L_{Nz} = \sum_{i=1}^N L_{iz} \\ &= (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \cdots + m_N R_N^2)\omega \\ &= \left(\sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \right) \omega. \end{aligned} \quad (3.5)$$

| Definición 3.2.1. Se denomina momento de inercia de un cuerpo con respecto al eje de rotación Z a la cantidad

$$I = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \cdots + m_N R_N^2 = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2. \quad (3.6)$$

Es decir, dicho momento se obtiene sumando, para cada partícula, el producto de su masa multiplicado por el cuadrado de su distancia al eje. Esta cantidad depende de la geometría del cuerpo que estudiemos, así como de la posición del eje de giro. Por lo tanto, es independiente del sistema de coordenadas que escojamos para su cálculo. Podemos escribir la ecuación (3.5) como

$$L_z = I\omega. \quad (3.7)$$

3.2.1 Ejes principales de inercia

Como hemos visto anteriormente, el momento angular total del cuerpo es igual a la suma de los momentos angulares de cada componente del sólido rígido.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \cdots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i \quad (3.8)$$

En general no es paralelo al eje de rotación, ya que los momentos angulares individuales \vec{L}_i que aparecen en la suma no son paralelos al eje. Sin embargo puede demostrarse que para cada cuerpo existen, sin importar su forma, por lo menos tres direcciones mutuamente perpendiculares para los cuales el momento angular es paralelo al eje de rotación. En este caso y como mencionamos anteriormente, obtendremos una matriz diagonal si expresamos el momento de inercia de forma matricial. Estos ejes se denominan ejes principales de inercia. Cuando el cuerpo tiene alguna clase de simetría, los ejes principales coinciden con algún eje de simetría.

Cuando el cuerpo rota alrededor de un eje principal de inercia, el momento angular total \vec{L} es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$, que se encuentra siempre a lo largo del eje de rotación. En lugar de la ecuación escalar (3.7), obtenemos la siguiente relación vectorial.

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (3.9)$$

3.3 Cálculo del momento de inercia

Los resultados que hemos obtenido anteriormente son aplicables a cuerpos con un número finito de partículas. Sin embargo, un sólido rígido está compuesto de un número muy grande de partículas, de modo que podemos considerarlo como una distribución continua. Por lo tanto, debemos extender la ecuación (3.4) para que sea aplicable a este tipo de cuerpo. En el caso de un cuerpo con una distribución continua de masa podemos calcular el momento de inercia dividiendo el objeto en muchos elementos infinitesimales de masa, Δm_i .

De este modo, el momento de inercia es aproximadamente $I \approx \sum_i R_i^2 \Delta m_i$. Si tomamos ahora el límite cuando $\Delta m_i \rightarrow 0$, la suma se convierte en una integral.

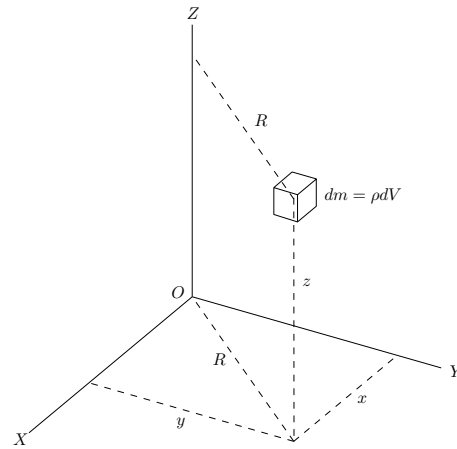


Figura 3.5: Elemento infinitesimal de masa.

De esta forma, la expresión (3.6) para el caso de sólidos rígidos tendría la siguiente forma:

$$I = \int R^2 dm. \quad (3.10)$$

Si consideramos ρ la densidad del cuerpo tenemos que $dm = \rho dV$, por lo que

$$I = \int \rho R^2 dV. \quad (3.11)$$

En el caso de que el cuerpo sea homogéneo, su densidad es constante y podemos escribir la ecuación (3.11) como

$$I = \rho \int R^2 dV. \quad (3.12)$$

De esta forma, la integral se reduce así a un factor geométrico, igual para todos los cuerpos con la misma forma y tamaño.

En el Anexo A podemos ver el momento de inercia de los cuerpos más frecuentes, así como el cálculo de alguno de ellos.

El momento de inercia depende del eje con respecto al que se calcula. Podemos ver cómo se relacionan los momentos de inercia calculados con respecto a ejes paralelos.

| Teorema 3.3.1 (Teorema de Steiner). *Sea Z un eje arbitrario y Z_C un eje paralelo que pasa a través del centro de masa del cuerpo. Si a es la separación entre los dos ejes, entonces*

$$I = I_C + Ma^2, \quad (3.13)$$

donde I e I_C son los momentos de inercia del cuerpo con respecto a Z y Z_C respectivamente y M es la masa del cuerpo.

Demostración. Para probar esta relación, escojamos los ejes $X_C Y_C Z_C$ de modo que su origen se encuentre en el centro de masa C y el eje Y_C se encuentre en el plano determinado por Z y Z_C . Los ejes XYZ se escogen de modo que Y coincide con Y_C . El punto P es un punto arbitrario del cuerpo M . De la Figura 3.6 observamos que $P'A$ es perpendicular a Y_C y $P'A = x$, $CA = y$, y $OC = a$, entonces

$$R_C^2 = x^2 + y^2, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + (y + a)^2 \\ &= x^2 + y^2 + 2ya + a^2 \\ &= R_C^2 + 2ya + a^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

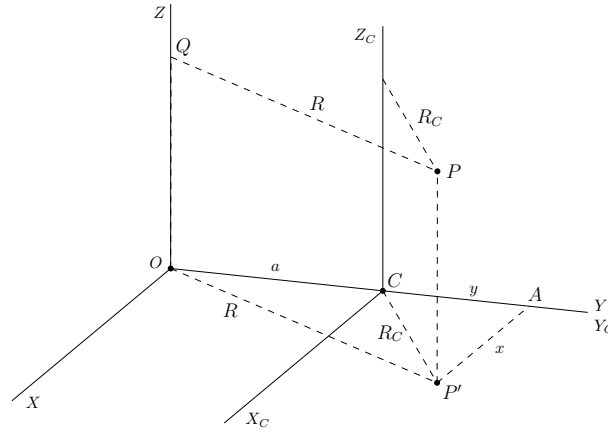


Figura 3.6: Teorema de Steiner.

Ahora el momento de inercia con respecto al eje Z es

$$\begin{aligned}
 I &= \sum m R^2 = \sum m (R_C^2 + 2ya + a^2) \\
 &= \sum m R_C^2 + 2a(\sum my) + a^2 \sum m.
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

El primer término es el momento de inercia I_C con respecto al eje Z_C , y en el último término $\sum m = M$, es la suma total del cuerpo. Por consiguiente,

$$I = I_C + 2a \sum my + Ma^2. \tag{3.17}$$

Para evaluar el término central tenemos en cuenta que la posición del centro de masa está dado por $y_{CM} = \sum my / \sum m$. En nuestro caso $y_{CM} = 0$ ya que el centro de masa coincide con el origen C del sistema $X_C Y_C Z_C$. Luego $\sum my = 0$ y la ecuación (3.17) se reduce a la ecuación (3.13), la cual queda así demostrada. |

Observación 3.3.1. El momento de inercia debe expresarse como el producto de una unidad de masa y el cuadrado de una unidad de distancia. Así, en el *SI* el momento de inercia se expresa en $m^2 kg$.

| **Definición 3.3.1.** El radio de giro de un cuerpo es la cantidad K definida de modo que se cumpla la siguiente relación,

$$I = MK^2. \tag{3.18}$$

en la cual I es el momento de inercia y M la masa del cuerpo. El radio de giro representa la distancia al eje a la cual se puede concentrar la masa del cuerpo sin variar su momento de inercia.

3.4 Ecuación del movimiento de la rotación de un sólido rígido

En la ecuación (2.27) establecimos una relación entre el momento angular total de un sistema de partículas y el torque total de las fuerzas aplicadas a las partículas. En esta relación tanto el torque como el momento angular se calculan con respecto a un punto en reposo en un sistema inercial. Teníamos que

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}. \quad (3.19)$$

donde \vec{L} era el momento angular total y $\vec{\tau}$ era el torque total debido a las fuerzas externas. Obviamente, esta ecuación se cumple también para un cuerpo rígido y va a constituir una ecuación fundamental para discutir el movimiento de rotación de un sólido rígido.

Consideremos en primer lugar un sólido rígido aislado (en ausencia de fuerzas externas). En este caso \vec{L} permanece constante.

Si consideramos el caso particular en el que $\vec{\omega}$ va en la dirección de un eje principal, el sólido rígido permanecerá girando sobre ese eje, ya que en este caso se tenía que $\vec{L} = I\vec{\omega}$. Llegamos entonces al siguiente resultado:

Proposición 3.4.1 (Ley de inercia para el movimiento de rotación). Un cuerpo rígido que rota alrededor de un eje principal se mueve con velocidad angular constante cuando no se aplican torques externos.

Por otra parte, si consideramos situaciones en las que el eje de rotación está fijo por algún agente externo, usando la ecuación (3.7) y $dL_z/dt = \tau_z$, obtenemos

$$I \frac{d\omega}{dt} = \tau_z. \quad (3.20)$$

Finalmente, si estudiamos el problema desde el punto de vista del sistema de referencia del centro de masa (aunque este no sea inercial), tenemos que

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}. \quad (3.21)$$

Si la rotación es alrededor de un eje principal, esta ecuación se puede escribir como $I_C(d\vec{\omega}/dt) = \vec{\tau}_{CM}$. Si $\vec{\tau}_{CM} = 0$, entonces $\vec{\omega}$ es constante, como ocurre por ejemplo cuando la única fuerza aplicada es el peso.

3.5 Energía cinética de rotación

En el capítulo anterior, definimos la energía cinética de un sistema de partículas como

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2. \quad (3.22)$$

En el caso de un sólido rígido rotando con respecto a un eje con velocidad angular $\vec{\omega}$, la velocidad de cada partícula es $v_i = \omega R_i$, donde R_i es la distancia de la partícula al eje de rotación. Podemos reescribir la energía cinética

$$E_c = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \right) \omega^2, \quad (3.23)$$

sustituyendo la ecuación (3.6) del momento de inercia,

$$E_c = \frac{1}{2} I \omega^2. \quad (3.24)$$

Esta expresión es correcta para cualquier eje aún si no fuera principal, ya que la magnitud de la velocidad es siempre $v_i = \omega R_i$. Cuando la rotación es con respecto a un eje principal, podemos utilizar la ecuación (3.9) y escribir

$$E_c = \frac{L^2}{2I}. \quad (3.25)$$

Consideremos ahora el caso general en el cual el cuerpo rígido rota con respecto a un eje que pasa a través del centro de masa y al mismo tiempo tiene un movimiento relativo de traslación con respecto al observador. Como hemos demostrado anteriormente para el caso de un sistema de partículas, $E_c = E_{c,CM} + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$. En el caso de un sólido rígido, $\frac{1}{2} M v_{CM}^2$ es justamente la energía cinética de traslación, y por consiguiente, $E_{c,CM}$ debe ser la energía cinética de rotación con respecto al centro de masa, calculada con la ayuda de la ecuación (3.24). Esto es cierto ya que, en un cuerpo rígido, el centro de masa está fijo en el cuerpo, y el único movimiento que el cuerpo puede tener con respecto a su centro de masa es de rotación. Por consiguiente, podemos escribir

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \quad (3.26)$$

en la cual I_C es el momento de inercia con respecto al eje de rotación que pasa a través del centro de masa.

Como la distancia entre las partículas de un sólido rígido no cambia durante el movimiento, podemos suponer que su energía potencial interna, $E_{p,int}$, permanece constante y, por consiguiente, no tenemos que considerarla cuando explicamos el intercambio de energía del cuerpo con sus alrededores. En concordancia, la conservación de la energía expresada por la ecuación (2.61) de un sistema de partículas se reduce, en el caso de un cuerpo rígido, simplemente a

$$E_c - E_{c,0} = W_{ext}, \quad (3.27)$$

donde W_{ext} es el trabajo de las fuerzas externas. Si las fuerzas externas son conservativas, tenemos

$$W_{ext} = (E_{p,0} - E_p)_{ext}, \quad (3.28)$$

donde $E_{p,ext}$ es la energía potencial asociada con las fuerzas externas, y la ecuación (3.27) se convierte en

$$E_c + E_p = (E_c + E_p)_0. \quad (3.29)$$

Este resultado es una situación especial de la ecuación (2.65) para el caso en el cual la energía potencial interna no cambia.

Llamamos energía total de un cuerpo rígido a $E = E_c + E_p$. Cuando tomamos la ecuación (3.26) para E_c y la ecuación (3.29) obtenemos

$$E = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 + E_p = \text{constante}. \quad (3.30)$$

Si alguna de las fuerzas son no conservativas, debemos escribir, en lugar de la ecuación (3.28),

$$W_{ext} = E_{p,0} - E_p + W', \quad (3.31)$$

donde W' es el trabajo de las fuerzas externas no conservativas. La ecuación (3.29) se puede expresar entonces como

$$(E_c + E_p) - (E_c + E_p)_0 = W', \quad (3.32)$$

no conservándose en este caso la energía total.

4 | Aplicaciones

4.1 Introducción

En este capítulo vamos a aplicar los resultados previos que hemos obtenido a situaciones concretas. Analizaremos en primer lugar algunos problemas en los que el eje de rotación no cambia de dirección, como son el caso de la máquina de Atwood, el péndulo físico y el de torsión y estudiaremos también el movimiento de rodadura. En la última sección estudiaremos el movimiento giroscópico, en el cual el eje de rotación cambia de dirección.

4.2 Polea con dos pesos

Consideramos en este apartado la máquina de Atwood. Está compuesta por una polea por la cual pasa una cuerda inextensible de masa despreciable. De los extremos de la cuerda cuelgan dos masas.

Trataremos nuestra polea como un disco de masa M y radio R , cuyo eje de rotación permanece fijo y pasa por el centro. Por esta polea pasa una cuerda, que está unida en un extremo a una masa m_1 y en el otro extremo a una masa m_2 . Podemos ver el sistema descrito en la Figura 4.1. Calcularemos el valor de la aceleración de las masas y las tensiones de la cuerda.

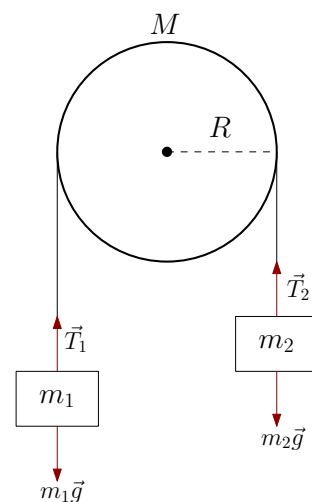


Figura 4.1: Máquina de Atwood.

Las fuerzas que actúan sobre la masa son el peso y la tensión. Utilizamos la segunda ley de Newton para las masas m_1 y m_2 de forma independiente y obtenemos las siguientes expresiones

$$-m_1g + T_1 = m_1a_1, \quad (4.1)$$

$$-m_2g + T_2 = m_2a_2. \quad (4.2)$$

Es importante tener en cuenta que el módulo de la aceleración con la que se mueve (sube o baja) m_1 es el mismo que la que afecta a m_2 (para bajar o subir, respectivamente). Entonces podemos considerar $a_1 = a$ y $a_2 = -a$. Por lo tanto,

$$-m_1g + T_1 = m_1a, \quad (4.3)$$

$$-m_2g + T_2 = -m_2a. \quad (4.4)$$

En la polea no hay movimiento de traslación, sino solo de rotación. Calculamos el torque debido a las tensiones T_1 y T_2

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= (-R \vec{u}_x) \times (-T_1 \vec{u}_y) + (R \vec{u}_x) \times (-T_2 \vec{u}_y) \\ &= (-RT_1 + RT_2) \vec{u}_y. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Realizamos la siguiente relación entre aceleración angular y lineal: como $v = \omega R$, si derivamos temporalmente obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{dv}{dt} \frac{1}{R}, \\ \alpha &= a \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

De la relación anterior, y haciendo uso del momento de inercia de la polea (Anexo A) y de la ecuación del movimiento de la rotación de la polea en torno al eje de simetría que pasa por el centro de masa, obtenemos

$$\begin{aligned} I \frac{d\omega}{dt} &= \tau, \\ \frac{1}{2} M R^2 \alpha &= R(T_2 - T_1), \\ \frac{1}{2} M a &= T_2 - T_1. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Despejamos de las ecuaciones (4.3) y (4.4) T_1 y T_2 , que restamos para sustituirlas en la expresión (4.7)

$$T_1 = m_1(a + g), \quad (4.8)$$

$$T_2 = m_2(g - a). \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} T_2 - T_1 &= m_2(g - a) - m_1(a + g) = \frac{1}{2}Ma, \\ g(m_2 - m_1) &= a\left(\frac{1}{2}M + m_1 + m_2\right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

De esta forma, la aceleración toma la siguiente expresión

$$a = \frac{g(m_2 - m_1)}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2}. \quad (4.11)$$

Podemos distinguir los siguientes casos:

- Si $m_1 = m_2$, entonces $a = 0$ y por tanto el sistema estaría en equilibrio.
- Si $m_1 < m_2$, entonces $a > 0$ y la polea giraría en sentido horario.
- En cambio, si $m_1 > m_2$, $a < 0$ y la polea giraría en sentido antihorario.

Por último, sustituyendo en las ecuaciones (4.8) y (4.9) el valor obtenido de la aceleración en el (4.11) logramos el valor de las tensiones,

$$T_1 = m_1 \left(\frac{g(m_2 - m_1)}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2} + g \right), \quad (4.12)$$

$$T_2 = m_2 \left(g - \frac{g(m_2 - m_1)}{\frac{1}{2}M + m_1 + m_2} \right). \quad (4.13)$$

Si la polea tuviera una masa despreciable el estudio sería más simple. Aplicaríamos la segunda ley de Newton a cada una de las dos masas, despreciando el movimiento de giro en el que está implicada la polea. De esta forma, hallamos la aceleración de ambas masas y la tensión a la que está sometida la cuerda. Como hemos mencionado anteriormente, ambas aceleraciones tienen el mismo módulo y sentido contrario. Además obtendríamos que las tensiones T_1 y T_2 se igualarían.

4.3 Péndulo físico

Un péndulo consiste en un cuerpo suspendido que oscila bajo la influencia de la fuerza gravitatoria que actúa sobre él. Si consideramos una partícula sostenida por una cuerda cuya masa despreciamos lo denominamos péndulo simple. En esta sección consideraremos un caso más complejo, el péndulo físico, ya que el cuerpo que oscila no se considera una partícula.

Sea un sólido rígido de masa M girando alrededor de un eje fijo perpendicular a la gravedad. El momento de inercia alrededor de dicho eje es I . Vamos a calcular la ecuación de evolución del ángulo θ , que mide, como se observa en la Figura 4.2, el ángulo entre el eje Y y el vector \vec{r}_{CM} . Lo tomaremos positivo cuando \vec{r}_{CM} gire en sentido antihorario.

Calculamos el torque debido al peso, ya que en este caso es la única fuerza que no da como resultado un torque nulo.

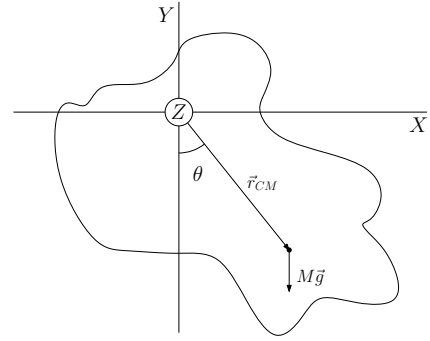


Figura 4.2: Péndulo físico.

$$\vec{\tau}_{CM} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ |r_{CM}| \sin \theta & -|r_{CM}| \cos \theta & 0 \\ 0 & -Mg & 0 \end{vmatrix} = -Mg |r_{CM}| \sin \theta \vec{u}_z. \quad (4.14)$$

Usando la ecuación (3.20) y teniendo en cuenta que $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$, obtenemos:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\tau_z}{I} = \frac{-Mg |r_{CM}| \sin \theta}{I}. \quad (4.15)$$

Para valores del ángulo $\theta \ll$, podemos hacer la aproximación $\sin \theta \simeq \theta$ obteniendo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-Mg |r_{CM}|}{I} \theta. \quad (4.16)$$

Esta ecuación determina un movimiento armónico simple, siendo su solución

$$\theta(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.17)$$

donde ω es la frecuencia angular.

Imponiendo las condiciones iniciales, podemos determinar los valores de las constantes A y φ . Por ejemplo, si $\theta(t = 0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(t = 0) = 0$, obtenemos que $A = \theta_0$ y que $\varphi = 0$.

Por lo tanto el resultado sería

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t). \quad (4.18)$$

Además, al tratarse de un movimiento armónico simple, a partir de la ecuación (4.16) podemos los valores de la frecuencia, f y el período, T .

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mg|r_{CM}|}{I}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg|r_{CM}|}}. \quad (4.19)$$

4.4 Péndulo de torsión

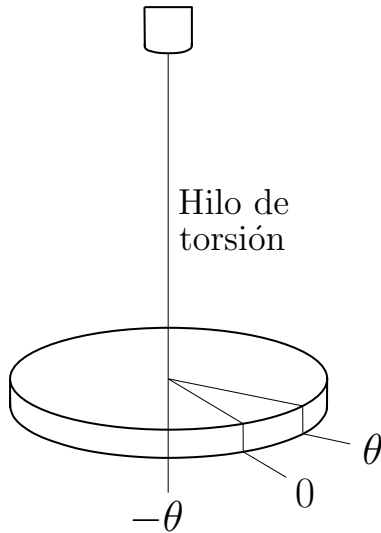


Figura 4.3: Péndulo de torsión.

El péndulo de torsión consiste en un hilo suspendido verticalmente con su extremo superior fijo, que llamaremos hilo de torsión. Del extremo inferior colgaremos un cuerpo rígido. Veremos qué ocurre si giramos el cuerpo que tenemos colgando.

Estudiaremos una forma sencilla de este tipo de péndulo. Tenemos un disco de radio R y masa M . Suspendemos el disco horizontalmente de su centro mediante un alambre. Si el alambre se tuerce, este giro obedece una versión de la ley de Hooke, análoga a ley $F = -kx$, que se cumple en el caso de un alambre que se estira una longitud x . La expresión de la ley de Hooke para la torsión es

$$\tau = -k\theta, \quad (4.20)$$

donde τ es el torque recuperador que ejerce el alambre debido al giro, θ es el ángulo que gira el alambre y k es una constante positiva conocida como constante de torsión.

Al desplazar el disco desde su posición de equilibrio un determinado ángulo θ en el plano horizontal, el disco empezará a oscilar alrededor de la posición de equilibrio. Vamos a ver que dicha oscilación es armónica.

Consideramos el sistema en el instante en que el ángulo girado a partir de la posición de equilibrio es θ . El torque recuperador τ proporciona una aceleración angular como vimos en la ecuación (3.20). De esta forma

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{\tau}{I} = -\frac{k}{I}\theta, \quad (4.21)$$

donde I es el momento de inercia del péndulo de torsión para la rotación alrededor del eje perpendicular que pasa por el centro de masa.

La ecuación a resolver es análoga a la ecuación vista en la sección anterior (4.16). Por tanto, si el péndulo de torsión se desplaza de su posición de equilibrio y se suelta, sabemos que la función $\theta(t)$ será una función sinusoidal. De igual modo, podemos obtener la frecuencia de oscilación, que es de la forma

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{I}}. \quad (4.22)$$

4.5 Movimiento de rodadura de cuerpos rígidos

En esta sección vamos a estudiar un caso especial de movimiento de rotación en el que un objeto rueda sin deslizar sobre una superficie. Este movimiento se denomina movimiento de rodadura.

Suponemos que tenemos un cilindro sobre una superficie. Las superficies deben ejercer unas fuerzas de rozamiento la una sobre la otra ya que si esto no ocurre el cilindro deslizaría. Si la fuerza de rozamiento es suficientemente grande, se produce la rodadura. El punto de apoyo del cuerpo no sufre desplazamiento, es decir, en ese instante está en reposo. Por esta razón, la fuerza de rozamiento es estática en lugar de dinámica. La fuerza de rozamiento estática actúa a lo largo de una distancia igual a cero y, por tanto, no realiza ningún trabajo sobre el cilindro.

Para que el cilindro ruede sin deslizar, el desplazamiento del centro de masa a lo largo de la superficie debe coincidir con el arco s correspondiente al arco girado como indica la Figura 4.4.

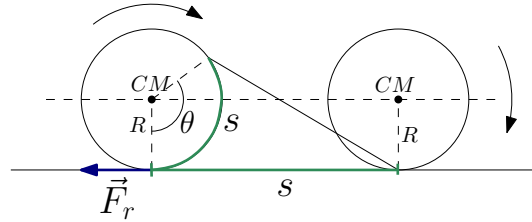


Figura 4.4: Condición de rodadura.

La velocidad con la que se traslada el centro de masa será la derivada con respecto al tiempo de dicho desplazamiento, es decir,

$$v_{CM} = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = \omega R. \quad (4.23)$$

Derivando de nuevo respecto al tiempo, obtenemos una relación análoga a la anterior pero con la aceleración,

$$a_{CM} = \alpha R. \quad (4.24)$$

Podemos considerar ambas relaciones como condiciones que se tienen que dar para que exista rodadura.

Para entender mejor el movimiento de rodadura lo podemos descomponer en un movimiento de rotación con respecto a un eje paralelo a la superficie, que pase por el centro de masa y un movimiento de traslación. En la rotación, las partículas del borde describen un movimiento circular con una velocidad lineal $v = R\omega$. A su vez, el cilindro sufre una traslación con una velocidad $v_{CM} = R\omega$ (condición de rodadura). Como vemos en la Figura 4.5, la velocidad del punto de apoyo es nula, lo que confirma que no se produce desplazamiento.

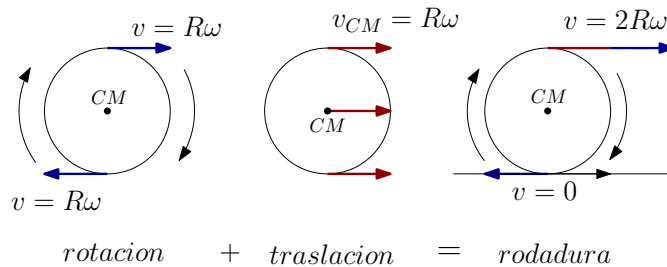


Figura 4.5: Descomposición del movimiento de rodadura.

A continuación, estudiaremos la rodadura de un cilindro sobre un plano inclinado.

Consideramos un plano con una inclinación β . Sobre este plano se sitúa un cilindro macizo, de radio R y masa M . Su momento de inercia es $I = MR^2/2$. Vamos a ver qué ocurre cuando imponemos la condición de rodadura, es decir, que ruede a lo largo del plano sin deslizar. En este caso, situaremos el origen de nuestro sistema de coordenadas en el centro de masa, haciendo coincidir el eje Z con el eje de giro. El eje de giro sufrirá una traslación con respecto al sistema laboratorio.

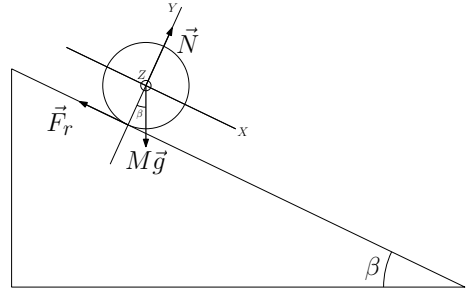


Figura 4.6: Descomposición de fuerzas en el plano inclinado.

En primer lugar vamos a calcular el torque total. El torque debido al peso es nulo, ya que escogeremos como origen de nuestro sistema de coordenadas el centro de masa. Por lo tanto, el torque total es el torque debido a la fuerza de rozamiento.

$$\vec{\tau} = -F_r R \vec{u}_z. \quad (4.25)$$

Aplicamos la fórmula (3.20) para estudiar el movimiento de rotación de nuestro cuerpo, sustituyendo el valor del torque calculado en (4.25). Si definimos $\vec{\alpha} = -\alpha \vec{u}_z$ tenemos

$$\begin{aligned} I\alpha &= \tau, \\ \alpha &= \frac{F_r R}{I}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton en el eje X , nos dice que

$$\begin{aligned} Mg \sin \beta - F_r &= Ma_x, \\ F_r &= Mg \sin \beta - Ma_x. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Veamos cuál es el valor de la aceleración del centro de masa, a_x , y la fuerza de rozamiento, F_r , si suponemos que el cuerpo rueda sin deslizar.

Sustituimos la aceleración angular de (4.26) en la condición (4.24). Posteriormente, sustituimos F_r gracias a (4.27) y despejamos para obtener la aceleración del centro de masa. Finalmente, empleamos el valor del momento de inercia del cilindro que aparece en el Anexo A.

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{F_r R}{I} R = \frac{R^2}{I} (Mg \sen \beta - M a_x), \\
 a_x &= \frac{R^2 M g \sen \beta}{I + M R^2} \\
 &= \frac{2}{3} g \sen \beta.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por último, podemos obtener el valor de la fuerza de rozamiento, a partir de (4.27) y (4.28).

$$\begin{aligned}
 F_r &= Mg \sen \beta - M \frac{2}{3} g \sen \beta \\
 &= \frac{1}{3} Mg \sen \beta.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Hemos calculado con ayuda de las ecuaciones que rigen el movimiento de rotación la aceleración que adquiere el centro de masa. A continuación, realizaremos un razonamiento desde el punto de vista energético y calcularemos la velocidad del centro de masa cuando llega al punto inferior.

Consideramos, de igual forma, la situación descrita en la Figura 4.6. Suponemos que el cilindro parte de una altura h . La energía del sistema cuando el cilindro está a una altura h del plano inclinado es únicamente energía potencial debida a la fuerza gravitatoria. Elegimos como origen de potencial la altura correspondiente al punto más bajo del plano inclinado. Debido a que consideramos un sistema aislado, la energía propia del sistema, (2.60), se conserva de acuerdo con el Corolario 2.6.1.

Denotamos con 0 el instante inicial y con f el instante final. La conservación de la energía nos dice que:

$$\begin{aligned}
 E_{c,0} + E_{p,0} &= E_{c,f} + E_{p,f}, \\
 0 + Mgh &= \left(\frac{1}{2} M v_{CM,f}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega_f^2 \right) + 0.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

De acuerdo con la ecuación (4.23) podemos relacionar la velocidad de traslación y angular una vez impuesta la condición de rodadura. Sustituimos el momento de inercia del cilindro y tenemos,

$$\begin{aligned}
 Mgh &= \frac{1}{2}Mv_{CM,f}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\frac{v_{CM,f}^2}{R^2} \\
 &= \frac{1}{2}Mv_{CM,f}^2 + \frac{1}{4}Mv_{CM,f}^2 \\
 &= \frac{3}{4}Mv_{CM,f}^2.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Podemos despejar de esta última ecuación la velocidad con la cual llega el cilindro al final del plano inclinado,

$$v_{CM,f} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}. \tag{4.32}$$

El centro de masa describe un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. En este caso, la velocidad y la aceleración cumplen la relación

$$v_{CM,f}^2 = v_{CM,0}^2 + 2a_{CM}(s_{CM,f} - s_{CM,0}), \tag{4.33}$$

donde $s_{CM,t}$ es la distancia recorrida en el instante t .

Podemos comprobar que se reobtiene el mismo resultado para la aceleración.

4.6 Movimiento gisroscópico

En todas las situaciones que hemos estudiado en las secciones anteriores hemos considerado que el eje de rotación se mantiene fijo o, si se ha movido, ha mantenido su dirección. En esta sección veremos qué ocurre cuando el eje de rotación cambia de dirección.

Esta variación de la posición del eje se puede ver en el giróscopo. El giróscopo es un instrumento que permite montar una rueda giratoria de modo que el eje puede cambiar libremente de dirección.

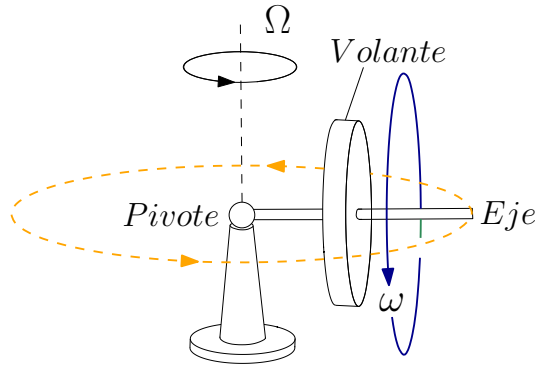


Figura 4.7: Giróscopo con precesión.

Si sostenemos el giroscopio con el eje de la rueda en horizontal y lo soltamos, el aparato cae debido a la gravedad. En cambio, si el volante gira, obtenemos un movimiento circular uniforme del eje en el plano horizontal, junto con la rotación de la rueda. Este movimiento del eje se denomina *precesión*. Al movimiento de precesión se puede superponer la oscilación verticalmente del eje, que denominaremos *nutación*.

Tanto la precesión como la nutación se pueden observar de igual modo en el movimiento de una peonza, y también en la naturaleza; de hecho, la Tierra está en precesión.

4.6.1 Precesión

Para estudiar el fenómeno de precesión, es importante recordar que la velocidad angular, el momento angular y el torque son cantidades vectoriales. En particular, necesitamos la relación entre el torque total $\vec{\tau}$ que actúa sobre el sólido rígido y la rapidez de cambio del momento angular, vista en la ecuación (3.19).

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (4.34)$$

Apliquemos primero esta ecuación al caso en el que el volante no gira. Tomamos como origen O el pivote y suponemos que la rueda es simétrica de masa M y un momento de inercia I . El eje del volante está sobre el eje X . Las fuerzas externas que actúan sobre el giroscopio son la normal que actúa en el pivote y el peso que actúa en el centro de masa, a una distancia r del pivote. La fuerza normal produce un torque nulo con respecto al pivote. En cambio, el peso produce un torque en la dirección Y .

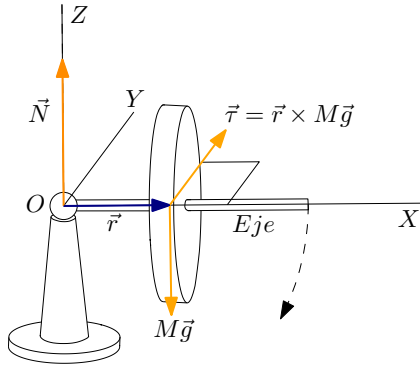


Figura 4.8: Giroscopo en reposo.

Al principio, no hay rotación y el momento angular inicial \vec{L} es cero. Por la ecuación (3.19), el cambio $d\vec{L}$ en un intervalo de tiempo dt es $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$. Este cambio es en la dirección de $\vec{\tau}$, Y . Al transcurrir cada intervalo dt , el momento angular cambia en incrementos $d\vec{L}$ en la dirección Y debido a que la dirección del torque es constante. El aumento constante del momento angular horizontal implica que el giroscopo girará hacia abajo alrededor del eje Y , es decir, cayendo con una trayectoria circular, y con rapidez creciente, hasta tirar la base o golpear la superficie sobre la que se apoya.

Consideramos ahora que el volante está girando y, por tanto, el momento angular inicial \vec{L}_0 no es nulo. Como el volante gira alrededor de su eje de simetría, \vec{L}_0 está sobre el eje. Sin embargo, cada cambio de momento angular $d\vec{L}$ es perpendicular al eje, porque el torque, $\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$, también lo es. Esto hace que cambie la dirección de \vec{L} pero no su magnitud. Los cambios $d\vec{L}$ siempre están en el plano horizontal XY , así que el vector de momento angular y eje del volante junto con el cual se mueve siempre son horizontales. Es decir, el eje no cae, sólo tiene precesión.

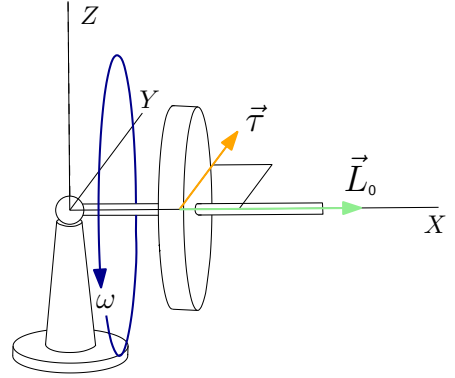


Figura 4.9: Giroscopo con el volante girando.

Supongamos que el giroscopo tiene momento angular \vec{L} . Un intervalo corto después dt , el momento angular es $\vec{L} + d\vec{L}$; el cambio infinitesimal en momento angular es $d\vec{L} = \vec{\tau}dt$, perpendicular a \vec{L} , como se muestra en el diagrama vectorial (Figura 4.10). Esto implica que el eje del volante del giroscopo giró un ángulo pequeño $d\phi$ dado por $d\phi = \frac{|d\vec{L}|}{|\vec{L}|}$. La rapidez con la que se mueve el eje, $d\phi/dt$, se denomina rapidez angular de precesión y la denotamos por Ω .

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{|d\vec{L}|/|\vec{L}|}{dt} = \frac{\tau}{L} = \frac{Mgr}{I\omega}. \quad (4.35)$$

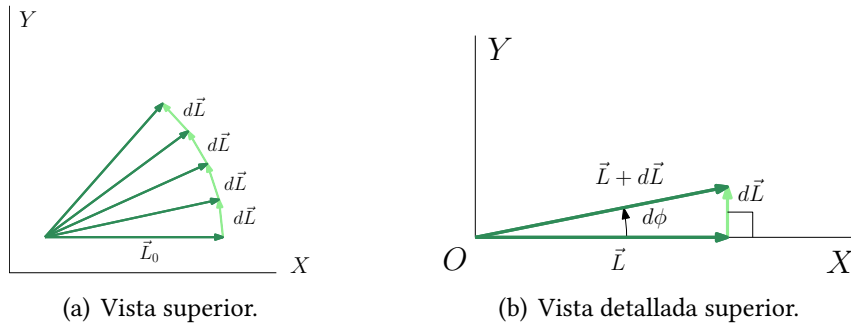


Figura 4.10: Diagrama vectorial

De este modo, vemos que la rapidez angular de precesión es inversamente proporcional a la rapidez angular de giro alrededor del eje. Un giroscopo que gira rápidamente tiene precesión lenta. Si ω disminuye debido a la fricción del pivote se incrementará la rapidez angular de precesión, Ω .

Podemos hacer el mismo razonamiento aunque el eje de giro no esté en la horizontal, sino formando un ángulo θ con la vertical. En esta ocasión,

$$|\vec{\tau}| = Mgr \sin \theta, \quad (4.36)$$

$$|d\vec{L}| = \bar{A}C d\phi = (L \sin \theta)(\Omega dt). \quad (4.37)$$

Igualando los resultados de la ecuación (4.37) con la expresión dada por $|d\vec{L}| = \tau dt$.

$$\Omega L \sin \theta = \tau. \quad (4.38)$$

Que junto con la expresión (4.36) obtenemos el mismo resultado que (4.35).

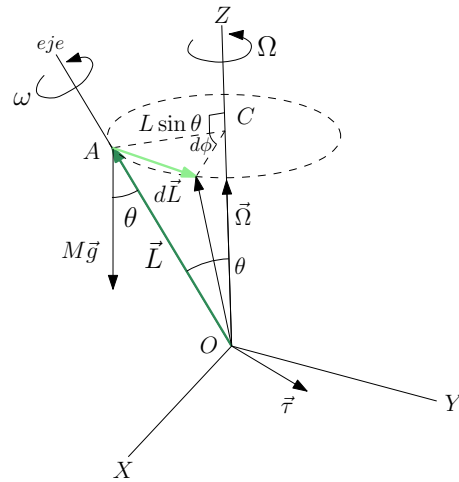


Figura 4.11: Caso general del giroscopo.

Los resultados obtenidos sobre el movimiento de precesión son aproximados. Son válidos si ω es muy grande en comparación con Ω . Esto se debe a que si el giróscopo (o cualquier sólido rígido) está precesando alrededor del eje OZ , tiene también un momento angular alrededor de dicho eje, y por lo tanto su momento angular no es $I\vec{\omega}$ como hemos supuesto, sino que la velocidad angular resultante es $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$. Sin embargo, si la precesión es muy lenta ($\Omega \ll \omega$), el momento angular con respecto a OZ puede despreciarse como hemos hecho y el resultado es aplicable.

Si no estuviéramos en este límite, el ángulo θ no permanecería constante, sino que oscilaría entre dos valores fijos. De esta forma, al movimiento de precesión se le superpondría la oscilación entre dos círculos C y C' . Este movimiento se denomina nutación. Al igual que la precesión, la nutación contribuye al momento angular total, pero en general, su contribución es aún menor que la de la precesión.

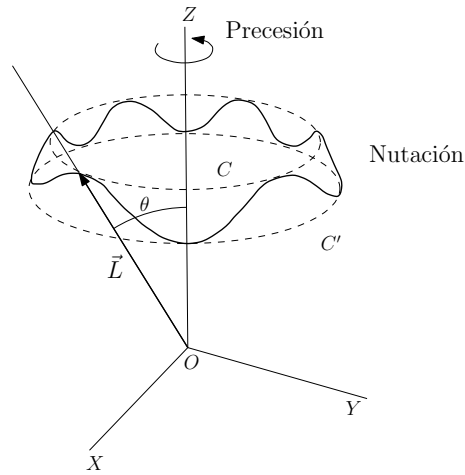


Figura 4.12: Movimiento de precesión y nutación.

5 | Conclusiones

En este trabajo hemos abordado el estudio de la dinámica del sólido rígido. En este capítulo presentaremos las conclusiones más relevantes. Hemos analizado la dinámica de un sistema de partículas como punto de partida para el estudio posterior del sólido rígido para finalmente resolver unos problemas concretos.

1. Hemos estudiado la dinámica de un sistema de partículas, y tras definir el centro de masa, hemos visto que este punto se mueve como si fuera una partícula de masa igual a la masa total del sistema sujeta a la fuerza externa aplicada al sistema. Posteriormente, tras definir el momento angular y el torque, hemos obtenido la ecuación que los relaciona tanto en el sistema laboratorio como en el sistema centro de masa
2. Hemos visto que el movimiento del sólido rígido puede descomponerse en traslación y rotación y nos hemos centrado en el estudio del movimiento de rotación. Hemos definido el tensor de inercia que depende de la forma del cuerpo y del sistema de referencia escogido y nos relaciona el momento angular con la velocidad angular. En muchas aplicaciones, el eje de rotación está fijo en el sólido y en ese caso nos hemos interesado en la componente de \vec{L} a lo largo de dicho eje, de modo que $L_z = I\omega$, donde I se denomina momento de inercia.
3. Hemos analizado la ecuación que rige el movimiento de rotación de un sólido rígido en distintas situaciones.

4. Se han resuelto varios problemas para aplicar la teoría estudiada. En primer lugar hemos considerado casos donde el eje de giro permanece fijo o sufre una traslación respecto al sistema-L. Hemos estudiado la condición de rodadura que permite que un cuerpo gire sin deslizar. Finalmente, hemos considerado que el eje de rotación sufre un cambio de dirección. Hemos estudiado el caso del movimiento giroscópico, analizando el movimiento de precesión.

A | **Momento de inercia de cuerpos más frecuentes**

En este apéndice presentamos el cálculo de los momentos de inercia de algunos de los cuerpos más frecuentes, todos con densidad de masa constante. En la tabla final se recogen los momentos de inercia de otros cuerpos aunque no especificaremos los cálculos.

A.1 **Disco. Eje perpendicular que pasa por el centro**

Calcularemos el momento de inercia de un disco de masa M y radio R . En este caso, consideramos el eje de giro perpendicular al plano del disco y pasando por su centro. Suponemos que el disco es homogéneo, así que utilizaremos la ecuación (3.12) para calcular el momento de inercia. Denotaremos en estos casos la densidad como δ ; para no confundirla con la coordenada ρ de las coordenadas cilíndrica en las que vamos a trabajar.

$$\delta = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}. \quad (\text{A.1})$$

Al ser un disco plano realizamos la integral sobre su superficie, donde $dS = \rho d\rho d\varphi$. De esta manera,

$$\begin{aligned}
 I &= \delta \int \rho^2 dS \\
 &= \frac{M}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\varphi d\rho \\
 &= \frac{M}{\pi R^2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\
 &= \frac{MR^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Cilindro. Eje que pasa por el centro del cilindro

El cálculo del momento de inercia se realiza de la mismo forma que hemos visto anteriormente en la sección A.1. En este caso, nuestra distribución es tridimensional. Consideramos un cilindro de masa M , radio R y longitud L . Su densidad será

$$\delta = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 L}. \tag{A.3}$$

Utilizando de nuevo coordenadas cilíndricas, llegamos a

$$\begin{aligned}
 I &= \delta \int \rho^2 dV \\
 &= \frac{M}{\pi R^2 L} \int_0^L \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\varphi d\rho dz \\
 &= \frac{M}{\pi R^2 L} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=R} [\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} [z]_{z=0}^{z=L} \\
 &= \frac{MR^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.3 Esfera. Eje que pasa por uno de sus diámetros

Consideremos una esfera de masa M y radio R , siendo su eje de giro uno de sus diámetros. La densidad de la esfera viene dada por

$$\delta = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (\text{A.5})$$

Vamos a calcular el momento de inercia tomando la esfera como una superposición de discos de espesor diferencial dz como podemos ver en la Figura A.1.

Tenemos un disco de radio $R(z)$ y altura diferencial dz . Su momento de inercia diferencial, como hemos calculado anteriormente, será

$$dI = \frac{dmR(z)^2}{2}, \quad (\text{A.6})$$

donde la masa de cada disco la podemos calcular haciendo el producto de su densidad por su volumen

$$dm = \delta dV = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \pi R(z)^2 dz. \quad (\text{A.7})$$

Por lo tanto,

$$dI = \frac{3MR(z)^2}{8R^3} dz. \quad (\text{A.8})$$

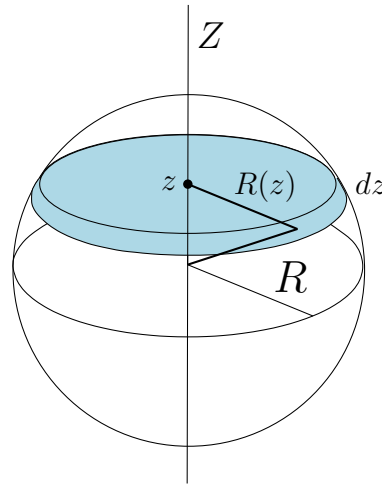
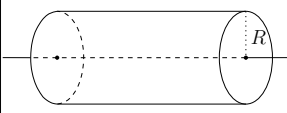
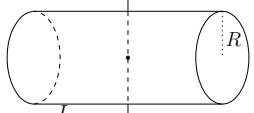
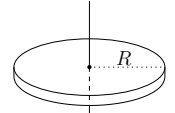
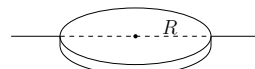
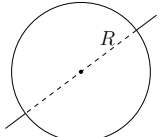
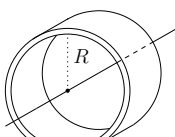
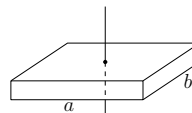
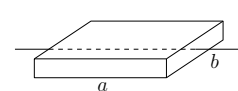
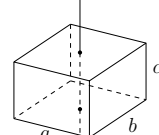


Figura A.1: Sección infinitesimal de una esfera.

Para obtener el momento de inercia de la esfera debemos sumar el momento de inercia de todos los discos. Situando el origen en el centro de la esfera y teniendo en cuenta la relación $R(z)^2 + z^2 = R^2$, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \int dI \\ &= \int_{-R}^R \frac{3MR(z)^2}{4R^3} dz \\ &= \frac{3M}{8R^3} \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{2MR^2}{5}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.4 Tabla con los momentos de inercia más frecuentes

<p>Cilindro</p>  $I = M \frac{R^2}{2}$	<p>Cilindro</p>  $I = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{L^2}{12} \right)$	<p>Disco</p>  $I = M \frac{R^2}{2}$
<p>Disco</p>  $I = M \frac{R^2}{4}$	<p>Esfera</p>  $I = M \frac{2R^2}{5}$	<p>Anillo</p>  $I = MR^2$
<p>Placa rectangular</p>  $I = M \frac{a^2 + b^2}{12}$	<p>Placa rectangular</p>  $I = M \frac{b^2}{12}$	<p>Paralelepípedo</p>  $I = M \frac{a^2 + b^2}{12}$

Bibliografía

- [1] ALONSO, M., AND FINN, E. J. *Física*, vol. 1. Fondo Educativo Interamericano, 1970.
- [2] EISBERG, R. M., AND LERNER, L. S. *Física: Fundamentos y Aplicaciones*, vol. 1. McGraw Hill, 1983.
- [3] GOLDSTEIN, H. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.
- [4] SEARS, F. W., FORD, A. L., AND FREEDMAN, R. A. *Física universitaria*, vol. 1. Pearson Educación, 2009.
- [5] SERWAY, R. A., AND JEWETT, J. W. *Física*, vol. 1. Thomson, 2003.